Guía 6, ejercicio 4 inciso a

Resolver la siguiente ecuación diferencial homogénea:

$$y^2 - x^2 = 2xy\frac{dy}{dx}$$

Hallar la solución particular para $P_0 = (1, 1)$.

Solución

Primero reordenamos la expresión:

$$y^2 - x^2 - 2xy\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(y^2 - x^2)dx - (2xy)dy = 0$$

Vemos que tenemos dos funciones homogéneas de grado 2. Dividimos todo por x^2:

$$(\frac{y^2}{x^2} - 1)dx - 2\frac{y}{x}dy = 0$$

Planteamos la siguiente sustitución: $v = y/x$, entonces $dy = xdv + vdx$.

$$(v^2 - 1)dx - 2v(xdv + vdx) = 0$$

$$v^2dx - dx - 2vxdv - 2v^2dx = 0$$

Separamos términos:

$$(-v^2 - 1)dx - 2vxdv = 0$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{2v}{-v^2 - 1}dv$$

El lado izquierdo es una integral inmediata que da como resultado $ln(x)$. Integrando del lado derecho:

$$\int \frac{2v}{-v^2 - 1}dv = -\int \frac{2v}{v^2 + 1}dv$$

Utilizo el método por sustitución: $u = v^2 + 1$. Entonces $du = 2vdv$

$$-\int \frac{du}{v} = -ln(v) = -ln(v^2 + 1) = ln(\frac{1}{v^2 + 1})$$

Volviendo a la ecuación diferencial:

$$ln(x) = ln(\frac{1}{v^2 + 1}) + C$$

Entonces:

$$ln(x) = ln(\frac{1}{\frac{y^2}{x^2} + 1}) + C$$

$$x = e^C(\frac{1}{\dfrac{y^2}{x^2} + 1})$$

$$x = K(\frac{1}{\frac{y^2}{x^2} + 1})$$

Utilizamos el punto $(1, 1)$ para hallar el valor de K.

$$1 = K(1/2)$$

$$K = 2$$

Por lo tanto:

$$x = 2(\frac{1}{\frac{y^2}{x^2} + 1})$$